

# RAPPELS D'ALGÈBRE LINEAIRE

## EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES

<b>I. Rappels d'algèbre linéaire .....</b>	<b>3</b>
I.1. Définition d'un espace vectoriel.....	3
I.2. Sous espace vectoriel.....	3
Sous espaces vectoriels supplémentaires .....	4
Parties libres, liées, génératrices .....	4
I.3. Base et dimension.....	4
I.4. Endomorphismes .....	5
Définition .....	5
Noyau et image .....	5
Théorème du rang (en dimension finie).....	5
I.5. Matrice d'un endomorphisme (uniquement en dimension finie ! ) .....	5
I.6. Changements de bases (en dimension finie).....	6
I.7. Valeurs propres et vecteurs propres.....	6
Liberté des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes .....	7
I.8. Polynôme caractéristique.....	7
Cas d'une matrice réelle lorsque le corps de base est $\mathbb{C}$ .....	7
I.9. Définition de la diagonalisation.....	7
I.10. Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation (dimension finie).....	8
Liens entre polynôme caractéristique et valeurs propres .....	9
<b>II. Equations différentielles linéaires du premier ordre .....</b>	<b>9</b>
II.1. Définitions .....	9
II.2. Résolution de l'équation différentielle linéaire du 1 <sup>er</sup> ordre, homogène .....	10
Exemple de résolution d'une équation différentielle du premier ordre homogène et moyen mnémotechnique pour retrouver les solutions. ....	11
II.3. Résolution de l'équation différentielle linéaire du 1 <sup>er</sup> ordre « avec second membre » .....	11
Méthode de la « variation de la constante » .....	11
II.4. Exemples de résolution d'équations du premier ordre .....	12
Exemples avec une « solution évidente » .....	12
Exemple où on doit utiliser la méthode de « variation de la constante » .....	13
<b>III. Equations différentielles linéaires du second ordre .....</b>	<b>13</b>
III.1. Définitions .....	13
Exemple en mécanique .....	14
III.2. Théorème de Cauchy : existence d'une solution d'une équation différentielle .....	14
III.3. Solutions des équations homogènes.....	15
III.4. Résolution des équations linéaires homogènes du second ordre, à coefficients constants .	15
Cas fondamental où les constantes $a$ et $b$ sont réelles, et où on cherche des solutions (à valeurs) réelles de $(EH)$ .....	16
III.5. Exemples de résolution d'équations différentielles linéaires, d'ordre 2, à coefficients constants.....	17
III.6. Abaissement de l'ordre .....	18
Exemple d'abaissement de l'ordre .....	18

#### IV. Equation différentielle du second ordre « complète » ..... 20

IV.1. Principe de résolution .....	20
IV.2. Principe de superposition.....	20
IV.3. Equation à coefficients constants dont le second membre est $t \rightarrow P(t)e^{mt}$ avec $P$ fonction polynôme de degré $k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{C}$ .....	20
Exemple, avec un passage par les complexes.....	21
IV.4. Variation d'une constante .....	22
Exemple de résolution par variation d'une constante .....	22
IV.5. Wronskien.....	23
IV.6. Méthode de variation de deux constantes .....	24
Exemple de résolution avec la méthode de variation des deux constantes .....	26

#### V. Equations différentielles d'ordre $n$ ..... 26

V.1. Définitions.....	26
V.2. Théorème de Cauchy : existence d'une solution d'une équation différentielle .....	27
V.3. Solutions d'une équation homogène .....	27
V.4. Résolution des équations linéaires homogènes à coefficients constants.....	27
V.5. Solutions réelles d'une équation homogène à coefficients constants réels .....	28
V.6. Résolution de l'équation complète.....	28
V.7. Equation à coefficients constants dont le second membre est $t \rightarrow P(t)e^{mt}$ avec $P$ fonction polynôme de degré $k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{C}$ .....	28
V.8. Principe de superposition .....	29

#### VI. Application : systèmes différentiels linéaires à coefficients constants ..... 30

VI.1. Position du problème .....	30
VI.2. Théorème d'existence .....	30
VI.3. Technique de résolution.....	30
VI.4. Exemples de résolution de systèmes différentiels linéaires homogènes.....	31
Cas d'une matrice diagonalisable dans $\mathbb{R}$ .....	31
Cas d'une matrice réelle non diagonalisable dans $\mathbb{R}$ , mais diagonalisable dans $\mathbb{C}$ .....	33

#### VII. Bibliographie DOC'INSA de mathématiques pour la deuxième année ..... 34

VII.1. Algèbre linéaire et bilinéaire, géométrie .....	34
VII.2. Analyse.....	35
VII.3. Méthodes de travail .....	36

## I. Rappels d'algèbre linéaire

Un rapide rappel de ces notions de première année qui vont servir tout au long de la deuxième année.

### I.1. Définition d'un espace vectoriel

Pour parler d'espace vectoriel il faut disposer d'un ensemble de « vecteurs » et d'un corps  $K$ , les « scalaires ». En général  $K = \mathbb{R}$  ou  $K = \mathbb{C}$ , mais on peut aussi choisir  $K = \{0, 1\}$ , par exemple dans la théorie des codes correcteurs d'erreurs, en informatique.

Un espace vectoriel  $E$  sur le corps  $K$  est un ensemble muni de deux lois de composition, une interne, l'autre « externe » car définie à l'aide d'un corps  $K$ , reliées par les propriétés suivantes :

-  $E$  est muni d'une première loi, notée  $+$  qui lui donne une structure de groupe commutatif ;

- il existe une deuxième loi, notée  $\cdot$ , externe, c'est à dire qu'à tout élément  $x$  de  $E$  et tout scalaire  $a$  de  $K$ , elle associe un élément, noté  $a \cdot x$ , de  $E$  ;

- quatre propriétés relient ces deux lois :

$$\forall a \in K, \forall x, y \in E, \quad a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y.$$

$$\forall a, b \in K, \forall x \in E \quad a \cdot (b \cdot x) = (a \cdot b) \cdot x \quad \text{en notant également } \cdot \text{ la multiplication de } K$$

$$\forall x \in E \quad 1 \cdot x = x \quad \text{en notant } 1 \text{ l'élément neutre de la multiplication de } K$$

$$\forall a, b \in K, \forall x \in E \quad (a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$$

**Remarque :** comme pour la multiplication de  $K$ , on n'écrit pas le  $\cdot$  de cette multiplication. Mais on écrit (par convention) les scalaires à gauche des vecteurs.

### I.2. Sous espace vectoriel

Soit  $(E, +, \cdot)$  un espace vectoriel sur  $K$ . Une partie  $E'$  de  $E$  est un sous espace vectoriel (pour les lois  $+$  et  $\cdot$ ) si les lois de  $E$  induisent une structure d'espace vectoriel sur  $E'$ .

**Théorème** Soit  $(E, +, \cdot)$  un espace vectoriel sur  $K$  et  $E' \subset E$ .  $E'$  est un sous espace vectoriel de  $E$  si et seulement si :

-  $E'$  est non vide

-  $E'$  est stable par combinaison linéaire, c'est à dire :

$$\forall a \in K, \forall x, y \in E' \quad ax + y \in E'$$

### Remarque

Les problèmes dont les solutions forment un espace vectoriel peuvent en général être résolus en se plaçant dans un « grand » espace vectoriel. Le problème particulier admet alors comme solutions les éléments d'un sous espace vectoriel.

Par exemple, on verra que les solutions d'une équation différentielle linéaire homogène, d'ordre  $n$ , forment un sous espace vectoriel de dimension  $n$ , de l'espace d'applications  $n$  fois dérivables.

### Sous espaces vectoriels supplémentaires

Soit  $(E, +, \cdot)$  un espace vectoriel sur  $K$ . Deux sous espaces vectoriels  $E'$  et  $E''$  de  $E$  sont supplémentaires si :

$$E' \cap E'' = \{0\} \text{ et } E' + E'' = E.$$

On note alors  $E' \oplus E'' = E$ ,  $E'$  et  $E''$  sont dits en somme directe.

Attention : ne pas confondre ceci avec la réunion de deux ensembles.

### Parties libres, liées, génératrices

Soit  $(E, +, \cdot)$  un espace vectoriel sur  $K$ . On donne dans  $E$  une partie de  $p$  vecteurs  $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ , où  $p$  est un entier non nul.

Cette partie est **libre** si pour toute combinaison linéaire nulle de ces  $p$  vecteurs, les coefficients de la combinaison linéaire sont nuls, ce qui s'écrit aussi :

$$\forall a_1, a_2, \dots, a_p \in K, \sum_{i=1}^{i=p} a_i v_i = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_p = 0.$$

Dans le cas contraire, la partie est **liée**. On peut alors exprimer un des vecteurs comme combinaison des autres.

Soit  $E'$  un sous espace vectoriel de  $E$ , et une partie  $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  de vecteurs de  $E'$ . Cette partie est *génératrice* de  $E'$  si tout vecteur de  $E'$  peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs  $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ .

### I.3. Base et dimension

Une partie  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  de  $E$  est une base de  $E$  si elle est libre et génératrice.

On montre que toutes les bases de  $E$  comportent le même nombre de vecteurs. Ce nombre (entier) est la dimension de  $E$ . Par convention, le sous espace vectoriel réduit à  $\{0\}$  est de dimension 0.

Lorsqu'il n'existe pas de base comportant un nombre fini de vecteurs, l'espace est de dimension infinie.

Dans la suite on note  $E$  un espace vectoriel sur  $K$  (pour les notions en dimension finie ou non). Lorsque la notion étudiée n'a de sens qu'en dimension finie, on note  $E_n$  un espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $K$ , et  $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base de  $E_n$ .

**Remarque** Il est intéressant, pour les exercices, de classer les notions étudiées en algèbre linéaire suivant ce critère de dimension.

## I.4. Endomorphismes

### Définition

Une application  $f : E \rightarrow E$  est un endomorphisme de  $E$  si elle transforme toute combinaison linéaire en une même combinaison linéaire des images :

$$\forall x, y \in E, \forall a, b \in K \quad f(ax + by) = af(x) + bf(y)$$

### Noyau et image

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

Le **noyau** de  $f$  est le sous espace vectoriel de  $E$  :  $\text{Ker} f = \{x \in E, f(x) = 0\}$ .

L'**image** de  $f$  est le sous espace vectoriel de  $E$  :  $\text{Im} f = \{x \in E, \exists x \in E, f(x) = 0\}$ .

L'application  $f$  est injective si et seulement si  $\text{Ker} f = \{0\}$ . Elle est surjective si et seulement si  $\text{Im} f = E$ .

Lorsque la dimension est finie, soit  $f$  un endomorphisme de  $E_n$ . Si  $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  est une base de  $E_n$ , le sous espace vectoriel  $\text{Im} f$  est engendré par  $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ .

### Théorème du rang (en dimension finie)

Dans  $E_n$  les dimensions de  $\text{Ker} f$  et de  $\text{Im} f$  sont reliées par :

$$\boxed{\dim(\text{Ker} f) + \dim(\text{Im} f) = n}$$

On a aussi l'équivalence :

$$f \text{ bijectif } E_n \rightarrow E_n \Leftrightarrow f \text{ injectif } E_n \rightarrow E_n \Leftrightarrow f \text{ surjectif } E_n \rightarrow E_n$$

et alors  $f$  est un isomorphisme (d'espace vectoriel).

## I.5. Matrice d'un endomorphisme (uniquement en dimension finie !)

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E_n$ , et  $B$  une base de  $E_n$ . On appelle **matrice** de  $f$  dans la base  $B$ , le tableau carré de  $n$  lignes et de  $n$  colonnes où les coordonnées des images de la base  $B$  sont disposées verticalement :

$$A = \left( a_{ij} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \quad f(e_j) = \sum_{1 \leq i \leq n} a_{ij} e_i$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix}$$

**Z !** Dans cette notation matricielle, les deux indices figurent en bas et à droite des coefficients. Le premier indice  $i$  est le numéro de ligne, le deuxième indice  $j$  est le numéro de colonne.

Les matrices permettent d'effectuer « matriciellement » les opérations d'algèbre linéaire (et aussi d'algèbre bilinéaire), c'est à dire d'utiliser seulement les coordonnées des vecteurs et les coefficients des matrices, ce qui revient à travailler comme dans l'espace vectoriel  $K^n$ .

Soit  $x$  un vecteur de  $E_n$ ,  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ , sa matrice colonne  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  dans  $B$ . Alors

l'image  $y = f(x)$  s'exprime matriciellement par le vecteur colonne  $Y$  de  $y$  :

$$\boxed{Y = AX}$$

où  $A$  est la matrice de  $f$  dans la base  $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ .

### I.6. Changements de bases (en dimension finie)

Donner une nouvelle base  $B' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$  de  $E_n$ , revient à donner la **matrice de changement de base**  $P$  qui stocke en colonne les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base (écrits dans la base  $B$ ) :

$$e'_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} e_i \quad P = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix}$$

La partie  $B' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$  est une nouvelle base de  $E_n$  si et seulement si la matrice  $P$  est inversible, c'est-à-dire  $\det P \neq 0$ .

Soit  $x$  un vecteur de  $E_n$ , de matrice colonne  $X$  dans  $B$ , de matrice colonne  $X'$  dans  $B'$ . La définition de  $P$  permet de relier  $X$  et  $X'$  par :

$$\boxed{X = PX'}$$

Alors pour un endomorphisme  $f$  de  $E_n$ , le vecteur  $y = f(x)$  ayant pour matrice colonne  $Y$  dans  $B$  et  $Y'$  dans  $B'$ , on a :

$$Y = AX,$$

$$X = PX' \text{ et } Y = PY'$$

$$\text{d'où } PY' = APX', \text{ soit } Y' = P^{-1}APX'$$

$$\boxed{A' = P^{-1}AP}$$

La matrice  $A'$  représente l'endomorphisme  $f$  dans la nouvelle base  $B'$ . La matrice  $A'$  est dite semblable à  $A$ .

**Conséquence** : le déterminant de deux matrices semblables est égal, ce qui permet de parler de déterminant d'un endomorphisme de  $E_n$ .

On a alors l'équivalence :  $f$  bijectif  $E_n \rightarrow E_n \Leftrightarrow \det f \neq 0$ .

### I.7. Valeurs propres et vecteurs propres

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Soit  $\lambda \in K$ .

**On dit que le scalaire  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$  si il existe un vecteur  $v \in E, v \neq 0$  tel que  $f(v) = \lambda v$ . Le vecteur  $v$  est alors un vecteur propre de  $f$ , associé à la valeur propre  $\lambda$ .**

**On considère alors le sous espace vectoriel de  $E$  :**

$$E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda \cdot \text{id}) = \{v \in E, f(v) = \lambda v\}$$

Si  $\lambda$  est valeur propre de  $f$ ,  $E_\lambda \neq \{0\}$  est le sous espace propre associé à la valeur propre  $\lambda$ .

Si  $\lambda$  n'est pas valeur propre de  $f$ ,  $E_\lambda = \{0\}$ .

**Z !**  $0$  n'est pas vecteur propre, mais appartient à tout sous espace propre !

**Liberté des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes**

Des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes forment une famille libre.

Des sous espaces propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont en somme directe.

### I.8. Polynôme caractéristique

**Définition** Soit  $I_n$  la matrice unité d'ordre  $n$ , matrice de l'endomorphisme identité  $id$ . Soit  $f$  un endomorphisme de  $E_n$ ,  $A$  la matrice de  $f$  dans une base  $B$  et  $\lambda$  complexe. Alors

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \det(f - \lambda id)$$

**définit une fonction polynôme de degré  $n$  de la variable  $\lambda$ . Ce polynôme est le polynôme caractéristique de  $f$  (et de  $A$ )<sup>1</sup>.**

**Remarque :** deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique<sup>2</sup>.

**Théorème** Les valeurs propres de  $f$  sont les racines, qui appartiennent à  $K$ , du polynôme caractéristique.

### Cas d'une matrice réelle lorsque le corps de base est $\mathbb{C}$

Lorsque qu'on travaille sur  $\mathbb{C}$ , mais qu'une matrice  $A$  est réelle, le polynôme caractéristique de  $A$  est à coefficients réels. Si un complexe  $\lambda$  est valeur propre de  $A$ , avec  $X$  formé des coordonnées d'un vecteur propre associé à  $\lambda$  :

$$AX = \lambda X \Rightarrow \overline{A} \overline{X} = \overline{\lambda} \overline{X} \Rightarrow A \overline{X} = \overline{\lambda} \overline{X}$$

c'est à dire que le complexe  $\overline{\lambda}$  est également valeur propre de  $A$ , et que  $\overline{X}$  contient les coordonnées d'un vecteur propre associé à  $\overline{\lambda}$ .

### I.9. Définition de la diagonalisation

**Un endomorphisme de  $f$  est diagonalisable (dans  $K$ ) si il existe une base formée de vecteurs propres de  $f$ , à coordonnées dans  $K$ .**

Ceci impose (dans ce cours) de travailler en dimension finie  $n$ , ou dans un sous espace de dimension finie d'un plus « grand espace vectoriel ». On doit alors trouver  $n$  valeurs propres (distinctes ou confondues) dans  $K$ , correspondant aux  $n$  vecteurs de base.

<sup>1</sup> Ici on parle d'abord d'un endomorphisme et on introduit sa matrice dans une base. Inversement, lorsqu'on donne une matrice carrée, il est utile de la considérer comme la matrice d'un endomorphisme.

<sup>2</sup> Le polynôme caractéristique de  $f$  ne dépend pas de la base choisie pour représenter  $f$  par une matrice  $A$ , car deux matrices semblables ont même déterminant.

La matrice d'un endomorphisme  $f$  diagonalisable, écrite dans une base de vecteurs propres, est diagonale. Il s'ensuit que la matrice de  $f$  dans n'importe quelle base est diagonalisable. Inversement, si une matrice est semblable à une matrice diagonale, l'endomorphisme de  $E$  associé est diagonalisable. On dira donc :

**Une matrice est diagonalisable (dans  $K$ ) si elle est semblable à une matrice diagonale (dont les coefficients appartiennent à  $K$ ).**

**Exemple** Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  à coefficients réels. Son polynôme

caractéristique est :  $P_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2 + 4 = (1 - 2i - \lambda)(1 + 2i - \lambda)$

Les racines sont complexes (non réelles). Donc  $A$  n'est pas diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ .

Cependant,  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ . Ceci signifie que l'on considère  $A$  comme la matrice de l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^2$  :  $X \in \mathbb{C}^2, X \rightarrow AX$ , et on peut trouver une base formée de deux vecteurs propres (dont les coordonnées sont complexes).

**On verra (par exemple dans VI.4) que dans beaucoup d'applications le passage par l'espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  est très utile, avant de revenir à des solutions réelles.**

### I.10. Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation (dimension finie)

**Théorème** Soit  $f$  un endomorphisme de  $E_n$ , dont toutes les racines du polynôme caractéristique sont dans  $K$ . Soit  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  les  $r$  ( $r \leq n$ ) valeurs propres distinctes de  $f$ ,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  les multiplicités des valeurs propres dans le polynôme caractéristique<sup>3</sup> et  $E_{\lambda=\lambda_i} = \text{Ker}(f - \lambda_i \cdot \text{id})$  le sous espace propre associé à  $\lambda_i$ . Alors :

- $\sum_{i=1}^r \alpha_i = n$
- $1 \leq \dim E_{\lambda=\lambda_i} \leq \alpha_i$
- $f$  est diagonalisable sur  $K \Leftrightarrow \alpha_i = \dim E_{\lambda=\lambda_i} \quad \forall i \in [1, r]$
- si toutes les valeurs propres de  $f$  sont simples ( $\alpha_i = 1$ ), alors  $f$  est diagonalisable dans  $K$  et les sous espaces propres sont des droites vectorielles.

**Exemples de diagonalisation** : détaillés dans le § VI.4, pour résoudre des systèmes différentiels.

---

<sup>3</sup> Si  $\lambda$  est racine simple du polynôme caractéristique, sa multiplicité est 1, si  $\lambda$  est racine double du polynôme caractéristique, sa multiplicité est 2, etc.... Par extension si  $\lambda$  n'est pas racine du polynôme caractéristique, sa multiplicité est 0.

### Liens entre polynôme caractéristique et valeurs propres

Si les racines du polynôme caractéristique sont dans  $K$ , elles représentent les  $n$  valeurs propres distinctes ou confondues<sup>4</sup>  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  de  $f$ .

Le polynôme caractéristique s'écrit :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(A) \lambda^{n-1} + \dots + \det A$$

$$\text{avec}^5 : \boxed{\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \operatorname{tr} A^t = \sum_{i=1}^n \lambda_i} \quad \text{et} \quad \det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

**Remarque** On verra dans le chapitre « Algèbre Bilineaire » que les matrices symétriques réelles sont diagonalisables dans  $\mathbb{R}$ .

## II. Equations différentielles linéaires du premier ordre

Dans tout ce polycopié, les applications sont définies sur un intervalle ouvert non vide  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Elles sont à valeurs dans  $K = \mathbb{R}$  ou  $K = \mathbb{C}$ .

**Z !** La variable est toujours réelle.

### II.1. Définitions

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre une équation :

$$(E) \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \quad t \in I$$

$$\text{soit} \quad (E) \quad y' + ay = b$$

où  $a$  et  $b$  sont des applications continues de  $I$  dans  $K$ .

**Résoudre**  $(E)$ , c'est chercher toutes les applications  $y$ , dérivables de  $I$  dans  $K$ , et vérifiant  $(E)$ .

### Cas particuliers

Lorsque  $b$  est nul, l'équation est **homogène** (ou « sans second membre »).

Lorsque  $a$  est une fonction constante, l'équation est à **coefficient constant** ( $b$  peut être non constant).

**Remarque** l'équation  $(E)$  est écrite dans ce cours avec le coefficient de  $y'$  égal à 1. Ce n'est pas le cas dans de nombreux exemples. Il faut alors se placer sur des intervalles où le coefficient de  $y'$  n'est pas nul.

### Exemple

On suppose que la température  $T$  d'un corps homogène est une fonction dérivable du temps  $t$ . Ce corps est porté à  $100^\circ$ , dans un milieu ambiant à  $20^\circ$ . On constate qu'en 10 minutes sa température chute de  $100^\circ$  à  $60^\circ$ . On peut écrire :

<sup>4</sup> Suivant les besoins on regroupe ou non les valeurs propres égales. Faire attention, ici on écrit plusieurs fois les valeurs propres multiples.

<sup>5</sup> Conseil : toujours vérifier cette relation dans les calculs pratiques.

$$\Delta T \approx -k[T(t) - 20]\Delta t, \text{ soit:}$$

$$T'(t) = -kT(t) + 20k$$

où  $k$  est une constante (dépendant du corps, et qu'il faut déterminer.)

C'est une équation différentielle linéaire, du premier ordre, à coefficient constant.

On trouve comme solution (cf. suite du chapitre) :

$$T(t) = 20 + 80e^{-kt}, \quad k = 0,1 \ln 2.$$

## II.2. Résolution de l'équation différentielle linéaire du 1<sup>er</sup> ordre, homogène

On utilise ici une méthode spécifique au premier ordre.

### Théorème

L'équation (EH)  $y' + ay = 0$  où  $a$  est une application continue de  $I$  dans  $K$ , a pour solutions les applications  $y$  :

$$y(t) = ke^{-A(t)}, \quad t \in I,$$

où  $A$  est une primitive de  $a$  sur  $I$  et  $k$  une constante de  $K$ .

On remarque que ces solutions forment une droite vectorielle (c'est un sous espace vectoriel de l'ensemble des applications de  $I$  dans  $K$ ). Comme pour toute droite vectorielle, une base est formée par un élément non nul, par exemple l'application obtenue pour  $k=1$ , soit  $y_1(t) = e^{-A(t)}, \quad t \in I$ .

### Démonstration du théorème

Tout d'abord il est évident que  $y, y(t) = ke^{-A(t)}$  est bien solution de (EH).

Réciproquement, soit  $y$  une solution quelconque de (EH). On va montrer qu'elle est bien de la forme annoncée.

On introduit :  $z = ye^A$ . Cette application est dérivable sur  $I$ , et

$$\begin{aligned} z' &= y'e^A + A'y e^A \\ z' &= -aye^A + aye^A = 0 \end{aligned}$$

L'application  $z$  est nulle sur  $I$ , c'est donc une constante. Si on note  $k$  cette constante :

$$z(t) = k, \quad t \in I \Rightarrow y(t) = ke^{-A(t)}, \quad t \in I.$$

**Cas de l'équation à coefficient constant :** une primitive de  $a$  est  $at$ . Les solutions s'écrivent  $y(t) = ke^{-at}, t \in I, k \in K$ .

**Remarque importante :** une exponentielle n'étant jamais nulle, si  $k \neq 0$ , la solution  $y = ke^{-A}$  ne s'annule jamais. En particulier, dans ce cas, elle garde un signe constant sur  $I$  (c'est le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue  $y$  sur l'intervalle  $I$ ).

Réciproquement, si il existe **une valeur**  $t_0 \in I$  telle que  $y(t_0) = 0$  où  $y$  est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre homogène, alors cette solution  $y$  est nulle sur  $I$ .

**Exemple de résolution d'une équation différentielle du premier ordre homogène et moyen mnémotechnique pour retrouver les solutions.**

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation (EH)  $y'(t) + ty(t) = 0$ .

Ici  $a(t) = t$ . On choisit  $A(t) = \frac{t^2}{2} \Rightarrow y(t) = ke^{-\frac{t^2}{2}}$ ,  $k \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$ .

**Remarque 1** : si on choisit d'écrire  $A(t) = \frac{t^2}{2} + c \Rightarrow y(t) = ke^{-\frac{t^2}{2} + c} = ke^{-\frac{t^2}{2}} e^c$ .

On retrouve les mêmes solutions.

**Remarque 2** : lorsque on travaille uniquement dans  $\mathbb{R}$ , on peut écrire, pour  $k$  non nul :

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -t \Rightarrow \ln \left| \frac{y(t)}{k} \right| = -\frac{t^2}{2} \Rightarrow y(t) = ke^{-\frac{t^2}{2}}.$$

En réintroduisant la valeur 0 pour  $k$ , on obtient bien toutes les solutions de l'équation (EH).

**Z!** Comme on a montré que pour toute solution non identiquement nulle, les solutions ne prennent jamais la valeur 0, les dénominateurs ci-dessus sont non nuls ! La constante d'intégration  $k$  « stocke » le signe de  $y$  (qui on le rappelle, garde sauf pour la solution nulle, un signe constant sur l'intervalle  $I$ ).

**II.3. Résolution de l'équation différentielle linéaire du 1<sup>er</sup> ordre « avec second membre »**

**Théorème : principe de résolution**

$$\text{L'équation (E) } y' + ay = b$$

où  $a$  et  $b$  sont des applications continues de  $I$  dans  $K$ , a pour solutions sur  $I$ , les applications  $y$  :

$$y = y_1 + y_p$$

où  $y_1$  est une solution de l'équation homogène associée (EHA)  $y' + ay = 0$  et  $y_p$  une solution particulière de l'équation complète.

La vérification que  $y$  est solution de (E) est évidente. Réciproquement, si on connaît une solution  $y_p$  de (E) et si on cherche toutes les solutions  $y$  de (E), alors  $y - y_p$  est solution de l'équation homogène associée.

**Comment déterminer une solution particulière de l'équation complète ?**

Il ne faut pas négliger les cas où la solution est « évidente ». Sinon on utilise la méthode suivante :

**Méthode de la « variation de la constante ».**

On commence par choisir la solution  $y_1 = e^{-A}$  jamais nulle de (EHA) [celle avec  $k=1$ , pour simplifier les calculs], et on cherche une solution sous la forme  $y = \lambda y_1$

où  $\lambda$  est une application dérivable de  $I$  dans  $K$ . Alors  $y' = \lambda' y_1 + \lambda y_1'$ , soit en reportant dans l'équation différentielle :

$$\lambda' y_1 + \lambda [y_1' + a y_1] = b \text{ et comme } y_1 \text{ est solution de (EHA) :}$$

$$\lambda' y_1 = b \Rightarrow \lambda' = \frac{b}{y_1}.$$

D'où  $\lambda$  en intégrant.

On voit que cette équation est toujours « résoluble », même si on ne sait pas calculer explicitement une primitive de  $\frac{b}{y_1}$ .

**Conseils pratiques :** effectuer les calculs en gardant le plus longtemps possible la forme  $y_1$ . De plus, si au moment d'intégrer pour obtenir  $\lambda$ , on introduit les constantes d'intégration, on obtient immédiatement la forme  $y = y_1 + y_p$  des solutions.

#### II.4. Exemples de résolution d'équations du premier ordre

##### Exemples avec une « solution évidente »

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation (E)  $y'(t) + ty(t) = t$ .

On commence par étudier l'équation homogène associée (EHA) :  $y'(t) + ty(t) = 0$ . On reconnaît l'équation résolue en II.2 : ses solutions s'écrivent :

$$y(t) = k e^{-\frac{t^2}{2}}, k \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}.$$

Une solution particulière (SPEC)<sup>6</sup> de l'équation est  $y_p(t) = 1$ . Les solutions de (E) s'écrivent, d'après le principe de résolution :

$$y(t) = k e^{-\frac{t^2}{2}} + 1, k \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$$

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation (E)  $(1-t^2)y'(t) - ty(t) = t$ .

C'est une équation différentielle linéaire, à coefficients non constants. Elle comporte un coefficient devant  $y'$  qui est nul en 1 et -1. On choisit donc un intervalle  $I$  ouvert inclus dans  $]-\infty, -1[ \cup ]-1, 1[ \cup ]1, \infty[$ .

L'équation homogène associée (EHA) est :  $(1-t^2)y'(t) - ty(t) = 0$ , qui s'écrit sur  $I$  :

$$\frac{y'}{y} = \frac{t}{1-t^2} \Rightarrow \ln \left| \frac{y}{k} \right| = -\frac{1}{2} \ln |1-t^2| \Rightarrow y = \frac{k}{\sqrt{|1-t^2|}} \quad (\text{cf}^7).$$

On remarque qu'une solution évidente de l'équation complète est -1.

Les solutions de (E) s'écrivent :  $y = \frac{k}{\sqrt{|1-t^2|}} - 1, k \in \mathbb{R}, t \in I$ .

<sup>6</sup> Il est commode, pour les exercices, d'utiliser les abréviations EHA, SPEC, SGEC,...

<sup>7</sup> Lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion, la variable n'est pas écrite dans «  $y(t)$  »,...

**Exemple où on doit utiliser la méthode de « variation de la constante »**

Résoudre sur  $\mathbb{R}^{+*}$  l'équation (E)  $y' - y = \frac{e^t}{t}$ . Préciser la solution  $y$  telle que  $y(1) = 1$ .

C'est une équation différentielle linéaire, à coefficients constants<sup>8</sup>. L'équation homogène associée a pour solutions les applications  $y : y = ke^t$ . Une technique de recherche d'une solution particulière est présentée au paragraphe IV.3, mais ici le second membre n'en permet pas l'utilisation.

On cherche donc une solution particulière de l'équation complète par la technique de variation d'une constante. On pose  $y_1 = e^t$  ( $y_1$  est une solution de l'équation homogène) et  $y = \lambda y_1$ , où  $\lambda$  est une application dérivable. En remplaçant dans

l'équation complète, on obtient :  $\lambda' y_1 = \frac{e^t}{t}$ .

On remplace maintenant  $y_1$  par son expression, d'où  $\lambda' = \frac{1}{t} \Rightarrow \lambda = \ln t + k$  et on

obtient les solutions de (E) sur  $\mathbb{R}^{+*}$  :  $y = ke^t + e^t \ln(t)$ ,  $k \in \mathbb{R}$

Il reste à préciser la condition initiale  $y(1) = ke = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{e}$ .

On trouve une seule solution vérifiant cette condition initiale :

$$y = e^{t-1} + e^t \ln(t), \quad t \in \mathbb{R}^{+*}.$$

Le fait qu'on trouve une et une seule solution est la transcription, pour l'ordre 1, des « conditions de Cauchy » (cf. §III.2 pour l'ordre 2, et §V.2 dans le cas général).

**III. Equations différentielles linéaires du second ordre****III.1. Définitions**

On appelle équation différentielle linéaire du second ordre une équation :

$$(E) \quad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \quad t \in I$$

soit

$$(E) \quad y'' + ay' + by = c$$

où  $a, b$  et  $c$  sont des applications continues de  $I$  dans  $K$ .

**Résoudre** (E), c'est chercher toutes les applications  $y$ , deux fois dérivables de  $I$  dans  $K$ , et vérifiant (E).

**Cas particuliers**

Lorsque  $c$  est nul, l'équation est **homogène** (ou « sans second membre »).

Lorsque  $a$  et  $b$  sont des constantes, l'équation est à **coefficients constants** ( $c$  peut être non constant).

**Remarque** comme pour l'équation du premier ordre, les équations étudiées dans ce cours ont le coefficient de  $y''$  égal à 1. Ce n'est pas le cas dans de nombreux

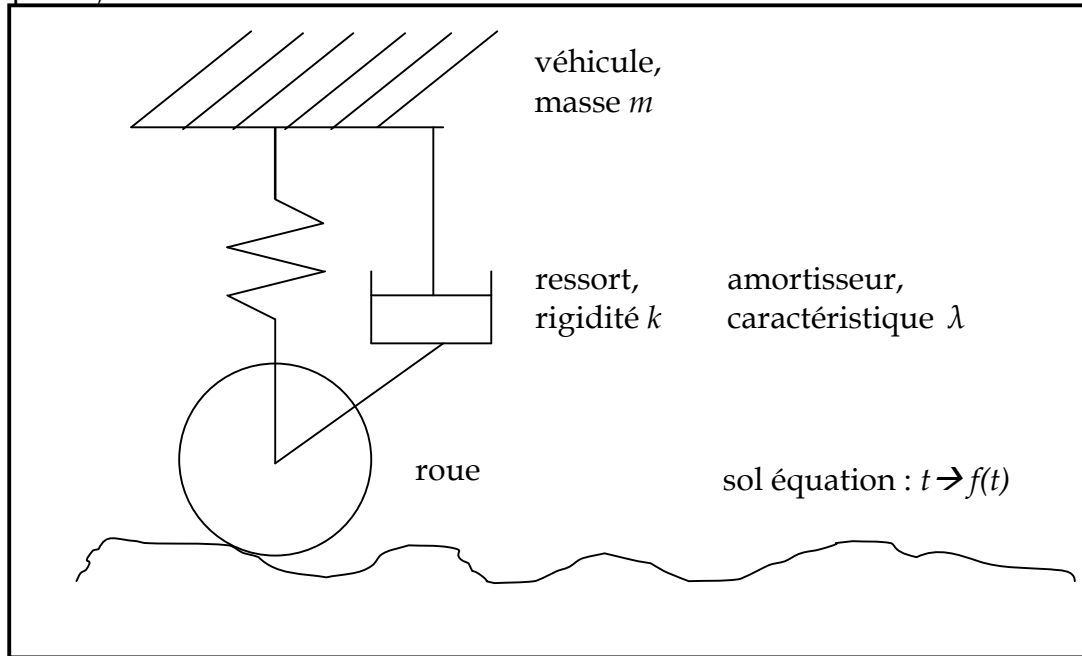
---

<sup>8</sup> Dans cette équation, le « second membre » impose de se placer sur un intervalle qui ne contient pas 0.

exemples. Il faut alors se placer sur des intervalles où le coefficient de  $y''$  n'est pas nul.

### Exemple en mécanique

En mécanique, on a le schéma suivant d'un véhicule se déplaçant sur une route de profil  $f$ :



On note  $y$  l'écart (vertical) de la masse  $m$  par rapport à sa position d'équilibre, en fonction du temps. La route ayant un profil  $f$ , le déplacement est donc  $y + f$ . Le ressort oppose au déplacement vertical de la masse  $m$  une force proportionnelle au déplacement, soit  $-k(y + f)$  et l'amortisseur une force proportionnelle à la vitesse, soit  $-\lambda(y + f)'$ . D'où l'équation du mouvement :  $my'' = -k(y + f) - \lambda(y + f)'$  qui s'écrit :

$$my'' + \lambda y' + ky = -kf - \lambda f'$$

On obtient une équation différentielle linéaire, du second ordre, à coefficients constants.

### III.2. Théorème de Cauchy : existence d'une solution d'une équation différentielle

On donne les applications continues  $a$ ,  $b$  et  $c$  de  $I$  dans  $K$ . Alors, quel que soit  $t_0 \in I$  et  $\beta_0, \beta_1 \in K$ , l'équation différentielle :

$$(EC) \quad y'' + ay' + by = c$$

admet une solution unique  $y$  vérifiant les « conditions initiales » :

$$y(t_0) = \beta_0, y'(t_0) = \beta_1$$

Ce théorème est admis.

### III.3. Solutions des équations homogènes

**Théorème** L'ensemble de solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 est un espace vectoriel (sur  $K$ ) de dimension 2.

#### Démonstration

Soit  $S$  l'ensemble des solutions de l'équation (EH)  $y'' + ay' + by = 0$ .

Si  $y_1$  et  $y_2$  appartiennent à  $S$  et si  $\alpha$  est un élément de  $K$ , alors la combinaison linéaire  $\alpha y_1 + y_2$  est aussi solution de (EH). Comme l'application nulle appartient à  $S$ ,  $S$  est un sous espace vectoriel de l'ensemble de toutes les applications de  $I$  dans  $K$ .

Pour montrer que cet espace est de dimension 2, on considère pour  $t_0 \in I$  fixé, l'application  $\Phi$  de  $S$  dans  $K^2$  :  $y \rightarrow \Phi(y) = (y(t_0), y'(t_0))$ . Il est rapide de vérifier que  $\Phi$  est linéaire. Le théorème de Cauchy montre que  $\Phi$  est un isomorphisme de  $S$  dans  $K^2$ , donc que la dimension de  $S$  est la même que celle de  $K^2$ , soit 2.

#### Remarque importante

A la différence des équations différentielles du premier ordre, il n'existe pas, pour les ordres supérieurs, de méthode générale de résolution des équations différentielles. C'est pourquoi il est fondamental de reconnaître les cas que l'on sait résoudre, par exemple celles à coefficients constants, étudiées dans le paragraphe suivant.

### III.4. Résolution des équations linéaires homogènes du second ordre, à coefficients constants

$$(EH) \quad y'' + ay' + by = 0$$

**Z !** On rappelle que ici  $a$  et  $b$  sont des constantes.

On cherche si des applications de la forme  $t \rightarrow e^{rt}$  sont solution de (EH) :

$$y = e^{rt} \dots \dots \dots \times b$$

$$y' = r e^{rt} \dots \dots \dots \times a$$

$$y'' = r^2 e^{rt} \dots \dots \dots \times 1$$

---


$$y \text{ vérifie (EH)} \Leftrightarrow (r^2 + ar + b)e^{rt} = 0 \Leftrightarrow$$

le scalaire  $r$  est solution de « l'équation caractéristique <sup>9</sup> » :

$$r^2 + ar + b = 0.$$

Cette équation est de degré 2 et possède donc, dans  $\mathbb{C}$ , 2 racines distinctes ou confondues<sup>10</sup>. On va détailler les différents cas possibles suivant les valeurs des racines  $r_1$  et  $r_2$  de cette équation. De plus, si les constantes  $a$  et  $b$  sont réelles, on va pouvoir obtenir des solutions réelles.

---

<sup>9</sup> Malgré ces similitudes, ne pas confondre avec le polynôme caractéristique d'un endomorphisme.

<sup>10</sup> Même lorsque, au départ,  $K=\mathbb{R}$ , il est nécessaire d'introduire les (éventuelles) racines complexes de l'équation caractéristique.

Si  $r_1 \neq r_2$ , alors les applications  $y_1 : t \rightarrow e^{r_1 t}$  et  $y_2 : t \rightarrow e^{r_2 t}$  sont solutions. On vérifie qu'elles forment une partie libre. Or on sait que l'ensemble des solutions de cette équation (EH) est un espace vectoriel de dimension 2. Donc : **une base de l'espace des solutions** de (EH) est formée par ces 2 applications. C'est-à-dire que toute solution s'écrit :

$$y = k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t}, \quad t \in \mathbb{R}, k_1, k_2 \in K.$$

Si  $r_1 = r_2$ , l'application  $y_1 : t \rightarrow e^{r_1 t}$  est solution. On vérifie qu'alors  $y_2 : t \rightarrow t e^{r_1 t}$  est également solution, et que la partie  $\{y_1, y_2\}$  est libre. Les solutions s'écrivent :

$$y = k_1 e^{r_1 t} + k_2 t e^{r_1 t}, \quad t \in \mathbb{R}, k_1, k_2 \in K.$$

**Cas fondamental où les constantes  $a$  et  $b$  sont réelles, et où on cherche des solutions (à valeurs) réelles de (EH).**

Ici, le cas  $r_1 = r_2$  ne pose pas problème :  $r_1 = -\frac{a}{2}$  est réel et le cas général décrit ci-dessus, avec des constantes réelles répond au problème. Les solutions s'écrivent :

$$y = k_1 e^{r_1 t} + k_2 t e^{r_1 t}, \quad t \in \mathbb{R}, k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Si  $r_1 \neq r_2$  et que ces racines  $r_1$  et  $r_2$  sont réelles, on obtient également les solutions réelles :

$$y = k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t}, \quad t \in \mathbb{R}, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

Par contre si les racines  $r_1$  et  $r_2$  sont complexes, on travaille momentanément dans un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  ; les calculs ci-dessous vont permettre de changer de base dans l'espace des solutions. En effet, comme les coefficients  $a$  et  $b$  de l'équation caractéristique sont réels, les deux solutions  $r_1$  et  $r_2$  de cette équation sont dans ce cas des complexes conjugués :

$$r_1 = \alpha + i\beta, \quad r_2 = \alpha - i\beta,$$

$$\text{d'où : } y_1 = e^{r_1 t} = e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t), \quad y_2 = e^{r_2 t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t - i \sin \beta t).$$

On obtient des applications à valeurs dans  $\mathbb{R}$  en calculant la partie réelle et la partie imaginaire de  $y_1$  :

$$y_3 = \operatorname{Re}(y_1) = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad y_4 = \operatorname{Im}(y_1) = \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

Comme les applications  $y_3$  et  $y_4$  sont des combinaisons linéaires (à coefficients complexes) des solutions  $y_1$  et  $y_2$ , elles sont solution (dans un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ ) de (EH). Il reste à vérifier que les vecteurs  $\{y_3, y_4\}$  forment une partie libre, par exemple en écrivant le déterminant de leurs coordonnées dans l'ancienne base  $\{y_1, y_2\}$  :

$$\det = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \end{vmatrix} = \frac{i}{2} \neq 0$$

Lorsque on garde  $\mathbb{C}$  comme corps de base, il s'agit juste d'un changement de base, et les solutions de (EH) s'écrivent maintenant :

$$y = k_3 y_3 + k_4 y_4, \quad t \in \mathbb{R}, k_3, k_4 \in \mathbb{C}$$

Et lorsque le corps de base est  $\mathbb{R}$  ? On a montré que l'espace des solutions est de dimension 2. Quel que soit le procédé employé, si on trouve deux solutions indépendantes réelles on sait qu'elles forment une base de l'espace vectoriel des solutions. C'est le cas avec  $y_3$  et  $y_4$ .

D'où **les solutions réelles de (EH)** peuvent s'écrire :

$$y = k_3 y_3 + k_4 y_4, \quad t \in \mathbb{R}, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$$

**Remarque** C'est pour ce type d'équation, utilisées en physique, mécanique,...., que la notion d'espace vectoriel de dimension 2 des solutions permet d'éviter les erreurs que l'on rencontre trop souvent. En particulier, on peut noter que les parties réelles de  $y_1$  et  $y_2$  sont égales, et n'ont aucune chance d'engendrer l'espace vectoriel des solutions !

### III.5. Exemples de résolution d'équations différentielles linéaires, d'ordre 2, à coefficients constants.

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation  $2y'' + y' - y = 0$ .

L'équation caractéristique  $2r^2 + r - 1 = 0$  a pour racines  $\frac{1}{2}$  et  $-1$  qui sont distinctes.

Les solutions s'écrivent  $y = c_1 e^{\frac{t}{2}} + c_2 e^{-t}$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation  $y'' - 4y' + 4y = 0$ .

L'équation caractéristique  $r^2 - 4r + 4 = 0$  a pour racine double 2. Les solutions s'écrivent  $y = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation  $y'' + \omega^2 y = 0$ ,  $\omega \in \mathbb{R}^{+*}$ .

L'équation caractéristique  $r^2 + \omega^2 = 0$  a pour racines distinctes les complexes  $i\omega$  et  $-i\omega$ . Avec la méthode du paragraphe précédent, on obtient les solutions réelles  $y = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

**III.6. Abaissement de l'ordre**

Bien qu'il n'existe pas de méthode générale pour déterminer les solutions d'une équation différentielle du second ordre, il arrive qu'on dispose d'une solution de l'équation homogène. Par exemple une solution polynôme, ou sous forme de série entière (sera vu plus tard dans le chapitre « Suites et séries de fonctions »).

D'où le problème : **on veut résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre homogène :**

$$(E) \ y'' + ay' + by = 0$$

où  $a$  et  $b$  sont continues de  $I$  dans  $K$ ,

**et on connaît une solution  $y_0$  non nulle de cette équation différentielle.**

On cherche une (autre) solution de cette équation, sous la forme  $y = \lambda y_0$ , où  $\lambda$  est une application deux fois dérivable sur  $I$ .

**Technique de calcul**

$$\begin{aligned} y &= \lambda y_0 && \dots \times b \\ y' &= \lambda' y_0 + \lambda y_0' && \dots \times a \\ y'' &= \lambda'' y_0 + 2\lambda' y_0' + \lambda y_0'' && \times 1 \end{aligned}$$

$y$  est solution de (E) si et seulement si

$$\lambda(y_0'' + ay_0' + by_0) + \lambda'(2y_0' + ay_0) + \lambda'' y_0 = 0$$

Or  $y_0$  est solution de (E). Il reste donc à résoudre :

$$(E_\lambda) \ \lambda'(2y_0' + ay_0) + \lambda'' y_0 = 0$$

qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre en  $\lambda'$ . Le coefficient de  $\lambda''$  étant  $y_0$ , on peut donc, d'après le paragraphe II.2, résoudre cette équation  $(E_\lambda)$  sur les intervalles où  $y_0$  n'est pas nul. On intègre alors  $\lambda'$  qui donne  $\lambda$ , puis on obtient  $y$  par :  $y = \lambda y_0$ .

**Remarque 1 :** on peut donc choisir comme solution de l'équation  $(E_\lambda)$  une solution  $\lambda'$  telle que  $\lambda'$  ne soit pas l'application nulle, et alors l'application  $\lambda$  obtenue n'est pas constante. La solution  $y = \lambda y_0$  n'est donc pas colinéaire à  $y_0$ , et la partie  $\{y_0, \lambda y_0\}$  est libre. On a alors une base de l'espace vectoriel des solutions.

**Remarque 2 :** on peut, sur  $\mathbb{R}$ , disposer les calculs sous la forme d'une dérivée logarithmique  $\frac{\lambda''}{\lambda'} = -\frac{2y_0' + ay_0}{y_0} = -2\frac{y_0'}{y_0} - a$ , ce qui facilite le calcul des primitives.

**Exemple d'abaissement de l'ordre**

On considère l'équation différentielle, définie sur  $I = \mathbb{R}^{+*}$  :

$$(E) \ (t^2 + t)y'' - 2ty' + 2y = 0$$

- 1) Chercher les solutions polynômes de (E).
- 2) Résoudre (E) sur  $I$ .

1) Si il existe une solution polynôme  $y$  de (E) de degré  $n$ , on peut écrire :  
 $y = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots$  avec  $a_n \neq 0$ .

D'où  $y' = n a_n t^{n-1} + \dots$  et  $y'' = n(n-1) a_n t^{n-2} + \dots$ .

En reportant dans (E), et en ne regardant que les termes de plus haut degré :

$$a_n(n(n-1) - 2n + 2)t^n + \dots = 0$$

Ce qui nécessite que  $(n(n-1) - 2n + 2) = 0$ . Soit  $n^2 - 3n + 2 = (n-1)(n-2) = 0$ .

Soit deux valeurs possibles de  $n$ ,  $n = 1$  ou  $n = 2$ .

**Z !** A ce stade, on n'est pas certain qu'il existe une solution polynôme.

Pour le vérifier, on écrit  $y = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ , soit  $y' = 2\alpha t + \beta$  et  $y'' = 2\alpha$ .

En remplaçant dans (E) :

$$(2\alpha - 4\alpha + 2\alpha)t^2 + (2\beta - 2\beta + 2\alpha)t + 2\gamma = 0 \quad \forall t \in I \Rightarrow \alpha = \gamma = 0 \text{ et } \beta \text{ quelconque.}$$

Il existe donc des solutions polynômes de (E), de la forme  $y = \beta t$ , qui forment une droite vectorielle. On remarque que la valeur  $n=2$  ne génère pas de solution pour (E).

2) On note  $y_0$  la solution telle que  $y_0(t) = t$ , et on cherche une solution  $y$  sous la forme  $y = \lambda y_0$  par la méthode d'abaissement de l'ordre.

On obtient  $\lambda' \left[ -2t y_0 + 2y_0'(t^2 + t) \right] + \lambda'' y_0(t^2 + t) = 0$ .

$$\text{D'où : } \frac{\lambda''}{\lambda'} = \frac{2t}{t^2 + t} - 2 \frac{y_0'}{y_0} \Rightarrow \ln \left| \frac{\lambda'}{k_1} \right| = 2 \ln |t+1| - 2 \ln |y_0| = \ln \left( \frac{t+1}{y_0} \right)^2 \Rightarrow \lambda' = k_1 \left( \frac{t+1}{y_0} \right)^2$$

Il est ici conseillé de bien mettre en évidence le logarithme au second membre, avant d'intégrer.

On remplace seulement maintenant  $y_0$  par sa valeur :

$$\lambda' = k_1 \left( \frac{t+1}{t} \right)^2 = k_1 \left( 1 + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2} \right), \text{ qui s'intègre à vue } \lambda = k_1 \left( t + 2 \ln t - \frac{1}{t} \right) + k_2.$$

Il reste à multiplier par  $y_0$  pour obtenir les solutions :

$$y = \lambda y_0 = k_1 (t^2 + 2t \ln t - 1) + k_2 t \quad t \in \mathbb{R}^{+*}, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

**Remarque** : la base des solutions est constituée de  $y_0$  et de  $y_1 : t \rightarrow t^2 + 2t \ln t - 1$ .

La façon de procéder ci-dessus, avec deux constantes d'intégration, permet d'obtenir directement l'espace vectoriel de dimension deux des solutions.

## IV. Equation différentielle du second ordre « complète »

### IV.1. Principe de résolution

On revient au cas général, où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des applications continues de  $I$  dans  $K$ .  
**Les solutions de (EC)  $y''+ay'+by=c$  s'obtiennent en ajoutant aux solutions de l'équation homogène associée une solution particulière de l'équation complète.**

Donc, pour résoudre l'équation complète, on commence en général par résoudre « l'équation homogène associée » (EHA) de (EC). Il est à noter que dès qu'on connaît une solution de l'équation homogène associée, on sait, au moins formellement, calculer les solutions de l'équation complète.

Pour déterminer une solution particulière de l'équation complète, on cherche une « solution évidente » souvent polynôme (éventuellement constante). Sinon on utilise les méthodes des paragraphes suivants :

### IV.2. Principe de superposition

Ce théorème peut s'utiliser lorsque le second membre est une somme d'applications continues, et que séparément chaque équation est plus simple à résoudre :

$$(EC) \quad y''+ay'+by=c_1+c_2$$

On peut alors résoudre les deux équations :

$$(EC1) \quad y''+ay'+by=c_1$$

$$(EC2) \quad y''+ay'+by=c_2$$

Si  $y_{p1}$  une solution particulière de  $(EC_1)$  et  $y_{p2}$  une solution particulière de  $(EC_2)$ , alors  $y_{p1}+y_{p2}$  est une solution particulière de  $(EC)$ . Pour chercher les solutions de  $(EC)$  il reste à remarquer que  $(EC_1)$  et  $(EC_2)$  ont la même équation homogène associée.

### IV.3. Equation à coefficients constants dont le second membre est $t \rightarrow P(t)e^{mt}$ avec $P$ fonction polynôme de degré $k \in \mathbb{N}$ , $m \in \mathbb{C}$ .

On constate qu'on peut toujours trouver une solution particulière de l'équation complète sous la forme :

$$y_p : t \rightarrow t^\alpha Q(t)e^{mt},$$

où  $Q$  est une fonction polynôme de degré  $k$  (à chercher sous forme indéterminée) et  $\alpha$  la multiplicité de  $m$  dans l'équation caractéristique (de l'équation homogène associée).

**Z !** Lorsqu'il n'y a pas d'exponentielle au second membre, cette règle s'applique avec  $m=0$  ; ne pas oublier de vérifier alors la multiplicité de  $m=0$  dans l'équation caractéristique.

**Remarque :** on peut ainsi superposer un nombre fini d'équations. Par contre, pour un nombre infini d'équations, il faut utiliser les théorèmes du chapitre « Séries de fonctions ».

### Exemple, avec un passage par les complexes

Résoudre sur  $\mathbb{R}$ , l'équation différentielle :

$$(E1) \quad y'' + y = t \cos t$$

Pour utiliser la forme «  $t \rightarrow P(t)e^{mt}$  » on commence par résoudre l'équation auxiliaire (Aux)  $y'' + y = te^{it}$

Il faut justifier ce passage par les complexes<sup>11</sup>.

Soit  $y$  une solution de (Aux). Cette solution s'écrit, avec ses parties réelle et imaginaire :  $y = x + iz$  où  $x$  et  $z$  sont deux fois dérivables, à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On remplace dans (Aux) et on obtient :

$$(Aux) \quad x'' + iz'' + x + iz = te^{it} = t(\cos t + i \sin t).$$

Soit deux équations (E1)  $x'' + x = t \cos t$  et  $z'' + z = t \sin t$ .

Lorsque les solutions de (Aux) seront connues, il suffira de prendre leurs parties réelles pour obtenir les solutions de (E1).

### Résolution de (Aux) $y'' + y = te^{it}$

On a déjà résolu l'équation homogène associée ( $\omega = 1$ , §III.5). Pour l'équation complète, le second membre est de la forme :

$$t \rightarrow t^k e^{mt} ; k = 1, m = i, \alpha = 1$$

On cherche une solution particulière  $y_p : t \rightarrow (at + b)te^{it}$ .

$$y_p \text{ est solution de (Aux) } \Leftrightarrow (4ait + 2a + 2bi)e^{it} = te^{it},$$

soit  $a = -\frac{i}{4}, b = \frac{1}{4}$  d'où la solution particulière de (Aux)  $y_p : t \rightarrow \frac{t}{4}(1 - it)e^{it}$ .

On en déduit que sa partie réelle est une solution particulière de (E1) :

$$\operatorname{Re}(y_p) = \frac{t}{4}(\cos t + t \sin t)$$

Les solutions à valeurs dans  $\mathbb{R}$  de (E1) s'écrivent comme somme des solutions de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation complète :

$$t \in \mathbb{R}, t \rightarrow k_1 \cos t + k_2 \sin t + \frac{t}{4}(\cos t + t \sin t)$$

$k_1, k_2$  constantes réelles.

**Z !** Ce « passage par les complexes » est différent de celui du paragraphe III.5. Ici on cherche, une solution de l'équation complète.

<sup>11</sup> La justification est établie sur cet exemple, mais a une portée générale.

**IV.4. Variation d'une constante**

La même technique que pour le premier ordre est utilisée pour une équation différentielle linéaire du second ordre « avec second membre » :

$$(E) \quad y'' + ay' + by = c$$

où  $a, b$  et  $c$  sont continues de  $I$  dans  $K$ , **lorsqu'on connaît une solution  $y_0$  de l'équation homogène.**

Comme pour l'équation du premier ordre, on cherche une solution particulière de l'équation complète, sous la forme  $y = \lambda y_0$ , où  $\lambda$  est deux fois dérivable sur  $I$ .

**Technique de calcul** (similaire à celle de l'abaissement de l'ordre, §III.6)

$$\begin{aligned} y &= \lambda y_0 && \dots \times b \\ y' &= \lambda' y_0 + \lambda y_0' && \dots \times a \\ y'' &= \lambda'' y_0 + 2\lambda' y_0' + \lambda y_0'' && \times 1 \end{aligned}$$

$y$  est solution de (E) si et seulement si

$$\lambda(y_0'' + ay_0' + by_0) + \lambda'(2y_0' + ay_0) + \lambda'' y_0 = c$$

Or  $y_0$  est solution de (EHA), donc vérifie :  $y_0'' + ay_0' + by_0 = 0$ .

On doit donc résoudre :

$$\lambda'(2y_0' + ay_0) + \lambda'' y_0 = c$$

qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre en  $\lambda'$ . Le coefficient de  $\lambda''$  étant  $y_0$ , on peut donc d'après le paragraphe I résoudre cette équation sur les intervalles où  $y_0$  n'est pas nul. On intègre alors  $\lambda'$  pour obtenir  $\lambda$ , puis on obtient  $y$  par :  $y = \lambda y_0$ .

**Exemple de résolution par variation d'une constante**

Résoudre sur  $I = ]-1, +\infty[$ , l'équation différentielle :

$$(E) \quad (t+1)y'' - y' - ty = e^{-t}$$

On commencera par vérifier que l'application  $y_0$ , avec  $y_0 = e^t$  est solution de l'équation homogène associée.

La vérification est immédiate. On cherche les autres solutions de (E), par la méthode de variation d'une constante.

$$\begin{aligned} y &= \lambda y_0 && \dots \times (-t) \\ y' &= \lambda' y_0 + \lambda y_0' && \dots \times (-1) \\ y'' &= \lambda'' y_0 + 2\lambda' y_0' + \lambda y_0'' && \times (t+1) \end{aligned}$$

$y$  est solution de (E) si et seulement si

$$(E1) \quad \lambda'(2y_0'(t+1) - y_0) + \lambda'' y_0(t+1) = e^{-t}.$$

On pose  $u = \lambda'$  et on résout cette équation du premier ordre en  $u$ . Pour l'équation homogène, on a :

$$y_0(t+1)u' + (2y_0'(t+1) - y_0)u = 0 \Rightarrow \frac{u'}{u} = -2\frac{y_0'}{y_0} + \frac{1}{t+1}$$

en intégrant  $\Rightarrow \ln\left|\frac{u}{k_1}\right| = \ln|t+1| - 2\ln|y_0| = \ln\left|\frac{t+1}{y_0^2}\right|,$

soit  $u = k_1|t+1|e^{-2t}$ , que l'on peut écrire,  $u = k_1(t+1)e^{-2t}$ , sur  $I$ .

On continue par la résolution de (E2) :  $(t+1)u' + (2t+1)u = e^{-2t}$  en utilisant la méthode de variation d'une constante pour cette équation du premier ordre.

On pose  $u = \mu u_0$ , avec  $u_0 = (t+1)e^{-2t}$ . Soit  $u_0(t+1)\mu' = e^{-2t} \Rightarrow \mu' = \frac{1}{(t+1)^2}$ .

$$\mu = -\frac{1}{t+1} + k_2 \text{ et } u = \mu u_0 = -e^{-2t} + k_2(t+1)e^{-2t}.$$

On revient à l'équation (E2) :  $u = \lambda' = -e^{-2t} + k_2(t+1)e^{-2t}$ .

A l'aide d'une intégration par parties, on obtient  $\lambda = \frac{1}{2}e^{-2t} - k_2\frac{2t+3}{4}e^{-2t} + k_3$ .

Finalement, comme  $y = \lambda y_0$ , et en changeant les noms des constantes

$$SGEC : y = \frac{1}{2}e^{-t} + K_1e^t + K_2(2t+3)e^{-t} \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}, \quad t \in I.$$

**Remarque 1** Si on cherche les solutions sur  $I = ]-\infty, -1[$  les calculs sont les mêmes, les constantes pouvant être différentes. En TD, on pourra étudier si cette équation possède des solutions sur  $\mathbb{R}$ .

**Remarque 2** La première partie de cette résolution (EHA de E1) est la méthode de l'abaissement de l'ordre.

#### IV.5. Wronskien

**Définition** Soit une équation différentielle linéaire homogène du second ordre :

$$(E) y'' + ay' + by = 0$$

où  $a$  et  $b$  sont continues de  $I$  dans  $K$ ,  $y_1$  et  $y_2$  deux solutions de cette équation. On appelle wronskien de ces solutions, le déterminant  $w$  :

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 \cdot y_2' - y_1' \cdot y_2.$$

**Propriété** si il existe  $t_0 \in I$  tel que  $w(t_0) = 0$ , alors l'application  $w$  est nulle sur  $I$ .

**Démonstration** : comme  $y_1$  et  $y_2$  sont eux fois dérivables, l'application  $w$  est dérivable sur  $I$  et sa dérivée s'écrit :

$$w' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2$$

Si on calcule  $w' + aw$  en utilisant le fait que  $y_1$  et  $y_2$  sont solutions de (E) :

$$\begin{aligned}
 w'+aw &= y_1(y_2'')-y_2(y_1'')+y_1(ay_2')-y_2(ay_1') \\
 &= y_1(-ay_2'-by_2)-y_2(-ay_1'-by_1)+y_1(ay_2')-y_2(ay_1') \\
 &= y_1(-by_2)-y_2(-by_1)=0
 \end{aligned}$$

On obtient que  $w$  est solution de l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre  $w'+aw=0$ , et donc que soit  $w$  est nulle sur  $I$ , soit jamais nulle (cf. §II.2).

**Théorème : utilisation du wronskien pour vérifier que deux solutions forment une partie libre.** Les solutions  $y_1$  et  $y_2$  de l'équation

$$(E) \quad y''+ay'+by=0$$

forment une base des solutions de (E) si et seulement si  $\exists t_0 \in I, w(t_0) \neq 0$ .

**Démonstration :** pour  $t_0 \in I$  fixé on utilise l'application linéaire  $\Phi$  du paragraphe III.3, c'est à dire  $\Phi : S \rightarrow K^2 : y \rightarrow \Phi(y) = (y(t_0), y'(t_0))$ .

Comme  $\Phi$  est bijective, la partie  $\{y_1, y_2\}$  est libre dans  $S$ , si et seulement si la partie  $\{\Phi(y_1), \Phi(y_2)\}$  est libre dans  $K^2$ , c'est à dire si et seulement si  $w(t_0)$  est différent de 0 (condition d'indépendance de deux vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 2).

**Remarque :** on a vu que ce résultat est indépendant du choix de  $t_0$  dans  $I$ .

#### IV.6. Méthode de variation de deux constantes

Cette méthode permet de chercher une solution d'une équation complète, lorsque on connaît déjà une base des solutions de l'équation homogène associée. Elle est donc en concurrence avec la méthode de variation d'une constante du paragraphe IV.4, et peut donner des calculs plus simples.

**On cherche une solution particulière** d'une équation différentielle linéaire du second ordre « avec second membre » :

$$(E) \quad y''+ay'+by=c$$

où  $a, b$  et  $c$  sont continues de  $I$  dans  $K$ , et on connaît une base  $\{y_1, y_2\}$  de solution de l'équation homogène  $y''+ay'+by=0$

On va montrer qu'il est possible de trouver une solution particulière de l'équation complète, sous la forme  $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ , où les applications  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont dérivables sur  $I$ .

Pour comprendre le fonctionnement de cette méthode (et sa généralisation aux équations d'ordre supérieur), on va construire des applications de  $I$  dans  $K^2$ .

Soit  $y$  solution (que l'on cherche) de (E), on pose :

$$t \in I \quad Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \quad Y_1(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_1'(t) \end{pmatrix} \quad Y_2(t) = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix}$$

Pour chaque  $t$  de  $I$ , on écrit le wronskien  $w(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$  de  $\{y_1, y_2\}$ . Comme les deux solutions de  $I'(EHA)$  sont indépendantes, on a montré au paragraphe précédent que ce wronskien est non nul en tout  $t$  de  $I$ . Les deux vecteurs  $Y_1(t)$  et  $Y_2(t)$  forment donc une base de  $K^2$ . Il existe donc des coefficients  $\lambda_1(t)$  et  $\lambda_2(t)$  tels que :

$$Y(t) = \lambda_1(t)Y_1(t) + \lambda_2(t)Y_2(t), \text{ c'est-à-dire :}$$

$$\begin{cases} (1) & y(t) = \lambda_1(t)y_1(t) + \lambda_2(t)y_2(t) \\ (2) & y'(t) = \lambda_1(t)y_1'(t) + \lambda_2(t)y_2'(t) \end{cases}$$

Toujours pour tout  $t$  dans  $I$ , ce système est de Cramer, et détermine  $\lambda_1(t)$  et  $\lambda_2(t)$  en fonction de  $y(t), y'(t), y_1(t), y_1'(t), y_2(t)$  et  $y_2'(t)$ . Ceci définit deux applications  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sur  $I$ , et qui s'expriment en fonction de  $y, y', y_1, y_1', y_2$  et  $y_2'$  (avec comme dénominateur le wronskien qui ne s'annule pas). Elles sont donc de classe  $C^1$  sur  $I$ .

On peut maintenant dériver la relation (1) :

$$(1) \quad y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \Rightarrow y' = \lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 + \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2'$$

En tenant compte de la relation (2)  $y' = \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2'$ , on obtient la relation :

$$(3) \quad \lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 = 0.$$

On revient maintenant à la technique classique des méthodes de variation de constante :

$$\begin{aligned} y &= \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \\ y' &= \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2' \\ y'' &= \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' + \lambda_1 y_1'' + \lambda_2 y_2'' \end{aligned}$$

On multiplie la première ligne par  $b$ , la deuxième ligne par  $a$ , et ajoute les trois lignes :  $y$  est solution de (E) si et seulement si :

$$(4) \quad \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' = c.$$

D'où le système formé des équations (3) et (4) :

$$\begin{cases} \lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 = 0 \\ \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' = c \end{cases}$$

On retrouve un système de Cramer, qui permet de déterminer  $\lambda_1'$  et  $\lambda_2'$ . Il reste alors à intégrer pour obtenir  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , et à écrire  $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ .

### Exemple de résolution avec la méthode de variation des deux constantes

Résoudre sur  $I = ]0, \pi[$ , l'équation différentielle :

$$(E) \quad y''(t) + y(t) = \frac{1}{\sin t}$$

L'équation homogène associée (à coefficients constants) a déjà été résolue, ses solutions sont les combinaisons linéaires des applications  $y_1 : t \rightarrow \cos t$  et  $y_2 : t \rightarrow \sin t$ .

Pour trouver une solution particulière de l'équation complète, on commence par remarquer que le second membre n'est pas de la forme «  $P(t)e^{mt}$  », et que donc la technique du §IV.3 ne s'applique pas. On va utiliser la méthode de variation des deux constantes.

$$\text{Le système } \begin{cases} \lambda'_1 y_1 + \lambda'_2 y_2 = 0 \\ \lambda'_1 y'_1 + \lambda'_2 y'_2 = c \end{cases} \text{ devient ici } \begin{cases} \cos t \lambda'_1 + \sin t \lambda'_2 = 0 \\ -\sin t \lambda'_1 + \cos t \lambda'_2 = \frac{1}{\sin t} \end{cases}.$$

D'où  $\lambda'_2 = \frac{\cos t}{\sin t}$  et  $\lambda'_1 = -1$ . Et en intégrant :  $\lambda_1 = -t + k_1$   $\lambda_2 = \ln|\sin t| + k_2$ .

Le fait d'avoir écrit les constantes d'intégration permet d'obtenir directement, avec  $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ , la solution générale de l'équation complète (SGEC) :

$$y = k_1 \cos t + k_2 \sin t - t \cos t + \sin t \times \ln(\sin t) \quad t \in ]0, \pi[, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

## V. Equations différentielles d'ordre $n$

Ce paragraphe unifie et prolonge les résultats des ordres 1 et 2.

### V.1. Définitions

On donne pour  $n$  entier  $>0$ , les  $n+1$  applications continues de  $I$  dans  $K$  :

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, b.$$

On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre  $n$**  une relation de la forme :

$$(EC) \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b$$

où  $y$  est une application de  $I$  dans  $K$ ,  $n$  fois dérivable sur  $I$  et  $t \in I$ .

L'inconnue est l'application  $y$ . **Résoudre** cette équation, c'est connaissant  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b$  trouver toutes les applications  $y$  vérifiant (EC).

**Z !** Dans ce cours, le coefficient de la dérivée  $n^{\text{ème}}$   $y^{(n)}$  de  $y$  est égal à 1. Dans les exercices, ce n'est pas toujours le cas. Si on appelle  $a_n$  ce coefficient, il faudrait « diviser » par ce coefficient  $a_n$  pour se ramener à la forme ci-dessus. Ceci n'est pas possible si  $a_n$  s'annule sur  $I$ . Il faut donc se placer sur des sous intervalles de  $I$  où  $a_n$  n'est pas nul. Les points où  $a_n$  est nul sont des **points singuliers** pour l'équation différentielle. Dans certains cas, il est possible de prolonger en un point singulier les solutions obtenues sur les deux intervalles adjacents à ce point.

Lorsque  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  sont des constantes, (mais pas nécessairement  $b$ ), l'équation est à **coefficients constants**.

Lorsque  $b$  est l'application nulle, l'équation différentielle est **homogène**.

Sinon, l'équation est dite **complète**, et  $b$  est le « second membre de l'équation ».

**Classification** Il est important de préciser la nature de l'équation différentielle à étudier. Cette nature donne des indications pour résoudre l'équation.

### Remarque

Les méthodes exposées pour l'ordre 1 et 2 (abaissement de l'ordre, variation d'une constante) sont peu adaptées aux ordres supérieurs.

## V.2. Théorème de Cauchy : existence d'une solution d'une équation différentielle

Soit  $n+1$  applications continues de  $I$  dans  $K$  :  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, b$ . Alors, quel que soit  $t_0 \in I$  et  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1} \in K$ , l'équation différentielle linéaire :

$$(EC) \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b$$

admet une solution unique  $y$  vérifiant les « conditions initiales » :

$$y(t_0) = \beta_0, y'(t_0) = \beta_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = \beta_{n-1}$$

## V.3. Solutions d'une équation homogène

**Théorème** L'ensemble de solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre  $n$  est un espace vectoriel (sur  $K$ ) de dimension  $n$ .

**Z !** En dehors de certains cas listés ci-dessous, la détermination d'une base de cet espace vectoriel dépasse le niveau de ce cours.

## V.4. Résolution des équations linéaires homogènes à coefficients constants

$$(EH) \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

On vérifie que si  $t \rightarrow e^{rt}$  est solution de (EH), alors le scalaire  $r$  est solution de « l'équation caractéristique » :

$$r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1r + a_0 = 0.$$

Cette équation est de degré  $n$  et possède donc, dans  $\mathbb{C}$ ,  $n$  racines distinctes ou confondues<sup>12</sup>. On regroupe les racines confondues, on note  $r_1, r_2, \dots, r_p$  les  $p$  racines distinctes et  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  leur multiplicité dans l'équation caractéristique.

**Une base de l'espace des solutions** de (EH) est formée par les  $n$  applications :

$$t \rightarrow e^{r_1 t}; t \rightarrow te^{r_1 t}; \dots; t \rightarrow t^{\alpha_1 - 1} e^{r_1 t}$$

c'est à dire  $\alpha_1$  applications,

.....

<sup>12</sup> Même lorsque, au départ,  $K=\mathbb{R}$ , il est nécessaire d'introduire les (éventuelles) racines complexes de l'équation caractéristique.

$$t \rightarrow e^{r_p t}; t \rightarrow te^{r_p t}; \dots; t \rightarrow t^{\alpha_p - 1} e^{r_p t}$$

c'est à dire  $\alpha_p$  applications ,

soit au total  $\sum_{i=1}^p \alpha_i = n$  applications.

### V.5. Solutions réelles d'une équation homogène à coefficients constants réels

Les  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  sont des constantes réelles. Dans ce cas on a souvent besoin des solutions de (EH) à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

- Lorsque toutes les solutions de l'équation caractéristique  $r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1r + a_0 = 0$  sont réelles, les solutions ci-dessus forment une base de solutions à valeurs réelles de (EH).
- Lorsque l'équation caractéristique  $r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1r + a_0 = 0$  admet une solution complexe non réelle  $r$ , alors elle admet aussi le complexe conjugué  $\bar{r}$  comme solution. Le plan vectoriel (complexe) engendré par les deux solutions :

$$y_1 : t \rightarrow e^{rt} \text{ et } y_2 : t \rightarrow e^{\bar{r}t}$$

admet aussi comme base  $(y_3, y_4)$  avec :

$$y_3 = \operatorname{Re}(y_1) = \frac{y_1 + y_2}{2} \text{ et } y_4 = \operatorname{Im}(y_1) = \frac{y_1 - y_2}{2i}.$$

On procède de même si  $r$  est racine double, à partir de  $y_5 : t \rightarrow te^{rt}, \dots$

En groupant ainsi deux par deux les solutions complexes de l'équation caractéristique, on obtient une base de l'espace vectoriel (complexe) des solutions de (EH). En se limitant aux combinaisons réelles de ces solutions, on obtient l'ensemble des solutions à valeurs réelles de (EH).

### V.6. Résolution de l'équation complète

Les solutions de (EC)  $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b$  s'obtiennent en ajoutant aux solutions de l'équation homogène associée une solution particulière de l'équation complète.

Donc, pour résoudre l'équation complète, on commence en général par résoudre « l'équation homogène associée » à (EC) :

$$(EH) \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

Pour déterminer une solution particulière de l'équation complète, on cherche une « solution évidente » souvent polynôme (éventuellement constante). Sinon on utilise les méthodes des paragraphes suivants :

### V.7. Equation à coefficients constants dont le second membre est $t \rightarrow P(t)e^{mt}$ avec $P$ fonction polynôme de degré $k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{C}$ .

Une solution particulière de l'équation complète s'écrit :

$$y_p : t \rightarrow t^\alpha Q(t)e^{mt},$$

où  $Q$  est une fonction polynôme de degré  $k$  (à chercher sous forme indéterminée) et  $\alpha$  la multiplicité de  $m$  dans l'équation caractéristique (de l'équation homogène associée).

**Z !** Lorsqu'il n'y a pas d'exponentielle au second membre, cette règle s'applique avec  $m=0$ ; ne pas oublier de vérifier alors la multiplicité de  $m=0$  dans l'équation caractéristique.

**Exemple** Résoudre sur  $\mathbb{R}$ , l'équation différentielle :

$$(EC) \quad y''' - 2y'' + y' = t^2$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 3, à coefficients constants « avec second membre ». On résout d'abord l'équation homogène associée.

$$(EH) \quad y''' - 2y'' + y' = 0$$

L'équation caractéristique est :  $r^3 - 2r^2 + r = 0$ , soit  $r(r-1)^2 = 0$  dont les racines sont  $r=0$  simple et  $r=1$  double. Une base de l'espace vectoriel (de dimension 3) des solutions est formée des applications :

$$t \rightarrow e^{0t} = 1; t \rightarrow e^t; t \rightarrow te^t$$

Le second membre de l'équation complète est de la forme :

$$t \rightarrow t^k e^{mt}; k=2, m=0, \alpha=1$$

On cherche une solution particulière  $y_p : t \rightarrow (at^2 + bt + c)t = at^3 + bt^2 + ct$ .

$$y_p \text{ est solution de } (EC) \Leftrightarrow 3at^2 + (2b - 12a)t + c - 4b + 6a = t^2,$$

soit  $a = \frac{1}{3}, b = 2, c = 6$  d'où la solution particulière  $y_p : t \rightarrow \frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 6t$ .

Les solutions à valeurs dans  $\mathbb{R}$  de (EC) s'écrivent :

$$t \in \mathbb{R}, t \rightarrow k_1 + k_2 e^t + k_3 t e^t + \frac{1}{3} t^3 + 2t^2 + 6t$$

$k_1, k_2, k_3$  constantes réelles.

**Remarque** : on constate qu'il est plus simple de résoudre cette équation en l'écrivant comme une équation du second ordre en  $u = y'$ .

## V.8. Principe de superposition

Ce théorème peut s'utiliser lorsque le second membre est une somme d'applications :

$$(EC) \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b_1 + b_2$$

où  $b_1$  et  $b_2$  sont continues sur  $I$ .

On introduit deux équations :

$$(EC_1) \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b_1$$

$$(EC_2) \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b_2$$

Si  $y_{p1}$  une solution particulière de  $(EC_1)$  et  $y_{p2}$  une solution particulière de  $(EC_2)$ , alors  $y_{p1} + y_{p2}$  est une solution particulière de  $(EC)$ . Pour chercher les

solutions de (EC) il reste à remarquer que  $(EC_1)$  et  $(EC_2)$  ont la même équation homogène associée.

## VI. Application : systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

$K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $I$  intervalle (ouvert, non vide) de  $\mathbb{R}$ . Toutes les applications considérées dans ce paragraphe sont des applications de la variable  $t \in I$ .

### VI.1. Position du problème

Soit  $A$  une matrice d'ordre  $n$ , à coefficients (constants) dans  $K$ . On cherche  $n$  applications dérivables de  $I$  dans  $K$  :  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , telles que, avec des notations

matricielles, le vecteur  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  et sa dérivée  $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$  vérifient :

$$\boxed{X' = AX}$$

**Remarque :** une équation différentielle linéaire d'ordre  $n$ , homogène, à coefficients constants peut s'interpréter comme un tel système différentiel. En effet l'équation  $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$  peut s'écrire :

$$y^{(n)} = -a_{n-1}y^{(n-1)} - \dots - a_1y' - a_0y.$$

On pose alors  $X = \begin{pmatrix} y \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$  ce qui donne en dérivant  $X' = \begin{pmatrix} y' \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{pmatrix}$ , et on obtient

système différentiel  $X' = AX$  :

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} = AX \text{ donc } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

### VI.2. Théorème d'existence

Pour une matrice  $A$  d'ordre  $n$ , à coefficients (constants) dans  $K$ , les solutions du système différentiel  $X' = AX$  forment un espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $K$ .

Ce théorème est admis.

### VI.3. Technique de résolution

L'idée est de réduire au maximum la matrice  $A$ . Ceci peut conduire, lorsque le corps de départ est  $\mathbb{R}$ , à passer à  $\mathbb{C}$ , c'est-à-dire à changer momentanément de corps de base. Toute matrice  $A$  est alors semblable à une matrice triangulaire  $A'$ ,

(éventuellement diagonale). Si on note  $P$  la matrice de passage et  $Y$  les nouvelles fonctions :

$$A' = P^{-1}AP \quad X = PY.$$

Les coefficients de  $P$  sont des constantes. En dérivant chaque ligne de  $X=PY$ , on obtient :  $X' = PY'$ .

Le système  $X'=AX$  devient :  $PY' = APY \Leftrightarrow Y' = P^{-1}APY$  c'est-à-dire :  $Y' = A'Y$ . On a alors, en écrivant les lignes de ce système :

- si  $A'$  est diagonale, des équations indépendantes les unes des autres (elles ne comportent qu'une application  $y_i$  et sa dérivée) : ce sont des équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre à coefficients constants que l'on résout dans un ordre quelconque (ne pas oublier les  $n$  constantes d'intégration).
- si  $A'$  est triangulaire supérieure, la dernière équation est indépendante des autres : c'est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants, que l'on résout d'abord. On remonte alors progressivement dans ce système différentiel triangulaire, en utilisant les solutions déjà calculées. Les autres équations sont des équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants avec un second membre, pour lesquelles on utilise les diverses techniques présentées dans ce polycopié.

#### VI.4. Exemples de résolution de systèmes différentiels linéaires homogènes

##### Cas d'une matrice diagonalisable dans $\mathbb{R}$

Chercher les solutions réelles du système différentiel  $X'=AX$ , avec  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

Les valeurs propres de  $A$  sont les racines du polynôme caractéristique :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

Pour factoriser<sup>13</sup> ce polynôme, on effectue des combinaisons linéaires des colonnes du déterminant, faisant apparaître un zéro et/ou des facteurs communs :  $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$  ;  $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$ . D'où :

$$\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)^2(6 - \lambda)$$

Les valeurs propres sont les réels  $\lambda_1 = 2$  de multiplicité 2 et  $\lambda_2 = 6$ , simple.

<sup>13</sup> L'objectif est de trouver les racines de ce polynôme, donc tout développement direct (règle de Sarrus) est à éviter.

Le sous espace propre associé à  $\lambda_2 = 6$ , est de dimension 1, donc on sait que le sous espace propre correspondant est une droite vectorielle. On trouve la droite de

$$\text{base } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'autre sous espace propre vérifie :

$$E_{\lambda=2} = \text{Ker}(f - 2.\text{id}) = \{X, (A - 2I)X = 0\}$$

Le système linéaire homogène à résoudre n'est pas de Cramer (son déterminant est

$$\text{nul}^{14}). \text{ En notant } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ on obtient trois fois l'équation :}$$

$$x + y + z = 0$$

qui est celle d'un plan vectoriel, de dimension 2 (égal à la multiplicité de la valeur propre 2).

Chaque sous espace propre a pour dimension la multiplicité de sa valeur propre,  $A$  est donc diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ .

On obtient alors (par exemple) :

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Z !** Le choix de l'ordre des valeurs propres dans  $A'$  est ici arbitraire, ainsi que le choix des bases dans les sous espaces propres. Mais attention à bien respecter la concordance entre  $A'$  et  $P$  (l'ordre des vecteurs de  $P$  doit correspondre à l'ordre des valeurs propres dans  $A'$ ).

$$\text{Le système } Y' = A'Y \text{ s'écrit alors : } \begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_2' = 2y_2 \\ y_3' = 6y_3 \end{cases} \text{ et a pour solutions : } \begin{cases} y_1 = C_1 e^{2t} \\ y_2 = C_2 e^{2t} \\ y_3 = C_3 e^{6t} \end{cases} \text{ où}$$

$C_1, C_2, C_3$  sont des constantes réelles.

Il reste à écrire les **solutions** du système différentiel dans la base de départ, à l'aide de la matrice  $P$  :

$$X = PY \Rightarrow \begin{cases} x_1 = (C_1 + C_2)e^{2t} + C_3 e^{6t} \\ x_2 = -C_1 e^{2t} + 2C_3 e^{6t} \\ x_3 = -C_2 e^{2t} + C_3 e^{6t} \end{cases}.$$

---

<sup>14</sup> C'est toujours le cas pour les sous espaces propres, par définition des valeurs propres.

**Remarque** si on pose  $X_1 = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $X_2 = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ -e^{2t} \end{pmatrix}$  et  $X_3 = \begin{pmatrix} e^{6t} \\ 2e^{6t} \\ e^{6t} \end{pmatrix}$ , on a

$X = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3$  avec  $(X_1, X_2, X_3)$  partie libre. Donc  $(X_1, X_2, X_3)$  est une base de l'espace vectoriel des solutions du système différentiel.

**Cas d'une matrice réelle non diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ , mais diagonalisable dans  $\mathbb{C}$ .**

Chercher les solutions réelles du système différentiel  $X' = AX$ , avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  (cf<sup>15</sup>).

Le polynôme caractéristique  $\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^2 + 4$  n'admet pas de racines réelles.

On va passer par l'espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  (celui des applications de  $I$  dans  $\mathbb{C}^2$ ), et introduire les racines complexes :  $\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda - 2i)(1 - \lambda + 2i)$ .

Les valeurs propres (simples) sont les complexes conjugués  $\lambda_1 = 1 + 2i$  et  $\lambda_2 = 1 - 2i$ . Donc  $A$  est diagonalisable dans  $\mathbb{C}$  (cf la CNS de diagonalisation, §I.10), avec (par exemple) :

$$A' = \begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 2i & -2i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Z !** Il est indispensable de choisir les colonnes de  $P$  conjuguées, ce qui est toujours possible pour une matrice  $A$  à coefficients réels car :

$$AX = \lambda X \Rightarrow \overline{AX} = \overline{\lambda X} \Rightarrow A\overline{X} = \overline{\lambda X}.$$

Le système  $Y' = A'Y$  s'écrit alors  $\begin{cases} y_1' = (1+2i)y_1 \\ y_2' = (1-2i)y_2 \end{cases}$  et a pour solutions :

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{(1+2i)t} \\ y_2 = C_2 e^{(1-2i)t} \end{cases} \quad \text{où } C_1, C_2 \text{ sont des constantes complexes.}$$

On revient à la base de départ, à l'aide de la matrice  $P$  :

$$X = PY = \begin{pmatrix} 2iC_1 e^{(1+2i)t} - 2iC_2 e^{(1-2i)t} \\ C_1 e^{(1+2i)t} + C_2 e^{(1-2i)t} \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2ie^{(1+2i)t} \\ e^{(1+2i)t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -2ie^{(1-2i)t} \\ e^{(1-2i)t} \end{pmatrix}.$$

En posant  $X_1 = \begin{pmatrix} 2ie^{(1+2i)t} \\ e^{(1+2i)t} \end{pmatrix}$  et  $X_2 = \begin{pmatrix} -2ie^{(1-2i)t} \\ e^{(1-2i)t} \end{pmatrix}$ , on a  $X = C_1X_1 + C_2X_2$ , les

vecteurs  $X_1$  et  $X_2$  n'étant pas colinéaires forment une partie libre. Donc  $(X_1, X_2)$  est une base de l'espace vectoriel, construit sur le corps  $\mathbb{C}$ , des solutions du système différentiel.

<sup>15</sup> Cette matrice est donnée en exemple au I.10.

On va maintenant changer de base, en posant :

$X_3 = \operatorname{Re}(X_1) = \frac{X_1 + X_2}{2}$  et  $X_4 = \operatorname{Im}(X_1) = \frac{X_1 - X_2}{2i}$ . Le déterminant des coordonnées

de ces vecteurs dans l'ancienne base  $(X_1, X_2)$  est  $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2i} = \frac{i}{2} \neq 0$ . La partie

$(X_3, X_4)$  est donc une partie libre, formée de deux vecteurs à composantes réelles. C'est donc aussi une base du même ensemble de solutions complexes du système différentiel. Si on se limite à des constantes réelles, comme l'ensemble des solutions du système différentiel est un espace vectoriel de dimension 2, on obtient une base de l'ensemble des solutions réelles du système différentiel  $X' = AX$ .

Ces solutions s'écrivent donc :

$X = K_1 \begin{pmatrix} -2e^t \sin 2t \\ e^t \cos 2t \end{pmatrix} + K_2 \begin{pmatrix} 2e^t \cos 2t \\ e^t \sin 2t \end{pmatrix}$  où  $K_1, K_2$  sont des constantes réelles et  $t \in \mathbb{R}$ .

## VII. Bibliographie DOC'INSA de mathématiques pour la deuxième année

Pour des compléments ou des exercices, voici une liste d'ouvrages. Avant d'emprunter un livre, il vous est conseillé de consulter les différents manuels dans la salle en libre service, pour sélectionner celui qui vous convient (repérés par : *Usuel xxxxx*). Les livres de cette liste comportent du cours et/ou des exercices corrigés.

### VII.1. Algèbre linéaire et bilinéaire, géométrie

Mathématiques, Algèbre DEUG A, tome IV de Azoulay et Avignant  
éditeur Mc Graw-Hill. (Cote : 10409(IV), Usuel 510 AZO)

Algèbre et géométrie, cours, méthodes, exercices résolus, PC, Collection Nouveaux Précis de Mathématiques, de D. Guinin, B. Joppin, éditeur Bréal (Cote 16154, Usuel 510.76 GUI) ou PSI (Cote 23369, Usuel 510.76 GUI)

Exercices Mathématiques, énoncés, solutions, commentaires, PSI, Collection Nouveaux Précis de Mathématiques, de D. Guinin, B. Joppin, éditeur Bréal (Cote 25716, Usuel 510.76 GUI)

Algèbre linéaire en dimension finie, 127 exercices corrigés Collection NICKEL, éditeur Vuibert (Cote PF/340, Usuel 512.076 PUF)

Algèbre 2, Collection FLASH U de H et Y Sureau, éditeur A. Colin (Cote 10369(II), Usuel 512.076SUR ii)

Algèbre et géométrie MPSI, de J. M. Monier, éditeur Dunod (Cote 12866, Usuel 512.076 MON)

Géométrie, de Thuillier et Belloc (Cote 4183 (V))

Algèbre et analyse, Cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés. de S. Balac et F. Sturm, éditeur Presses Polytechniques et universitaires Romandes, collection « INSA ».

Ouvrage de niveau plus élevé : METHODIX, algèbre de X. Merlin (Cote 12087, Usuel 512 MER)

## VII.2. Analyse

Equations différentielles, exercices corrigés, de G. Hirsch et G. Eguether  
Collection "Comprendre et appliquer", éditeur Masson (Cote B.392/10, Usuel 515 GIR)

Suites et séries, 449 tests et exercices corrigés, de G. Hirsch et G. Eguether  
Collection "Comprendre et appliquer", éditeur Masson (Cote 12260, Usuel 515 .076 HIR)

Mathématiques, Analyse DEUG A, tome III de Azoulay et Avignant  
Editeur Mc Graw-Hill. (Cote : 10409(III), Usuel 510 AZO)

Analyse, de Swokowski, éditeur De Boek Université (Cote 11047)  
*Livre traduit de l'américain, avec beaucoup d'exemples pratiques et d'illustrations.*

Analyse, cours et exercices résolus, Collection Nouveaux Précis de Mathématiques  
par D. Guinin, B. Joppin, éditeur Bréal, PCSI (Cote 15205 (IV), Usuel 515 GUI IV)  
ou PC (Cote 23051, Usuel 515.76 GUI)

Analyse, tome 1 et tome 3, par Thuillier et Belloc (Cote 4183 (I) et (III ))

Math Sup et Spé (Rappels de cours et exercices corrigés) de M. Serfati, collection DIA, éditeur Belin (Cote 9796 III, Usuel 515.076 SER)

Analyse 2, par P. Thomsen Collection FLASH U, éditeur Masson (Cote 13717 (III), Usuel 515.076 THO II)

Mathématiques, Séries, séries vectorielles suites et séries de fonctions (73 exercices corrigés) collection NICKEL, éditeur Vuibert (Cote PF315, Usuel 515.076DUP)

Dérivation, fonctions et courbes (§ fonctions de plusieurs variables), Collection NICKEL, éditeur Vuibert (Cote PF/344, Usuel 515.076 MAR)

Mathématiques, les séries de F. Delmer, éditeur DUNOD (Cote 11965, Usuel 515.076 DEL)

Mathématiques, PC 1<sup>ère</sup> année et spéciales B, tome 2 et tome 3 de L. Lesieur, et J. Lefebvre éditeur A. Colin, collection U. (Cote 4171(II) et (III), Usuel 510 LES)

Fonctions de plusieurs variables, exercices corrigés, de G. Hirsch et G. Eguether Collection "Comprendre et appliquer", éditeur Masson (Cote 11549, Usuel 515 HIR)

Mathématiques, fonctions de plusieurs variables et intégration de F. Delmer, éditeur DUNOD (Cote 13348, Usuel 515.076 DEL)

Ouvrage de niveau plus élevé : METHODIX, analyse par X. Merlin, éditeur ellipses (Cote 11536, Usuel 515.076 MER)

### **VII.3. Méthodes de travail**

Découvrez votre méthode de travail, de G. Sonnois, éditeur Editions du Rocher (Cote 12971)

Guide des méthodes de travail, de M. Coéffé, éditeur Dunod (Cote 12970, Usuel 371.3 COE N.ed)

Des méthodes pour apprendre, de M. Romainville et C. Gentile, éditeur les Editions d'Organisation (Cote 9843)

Comment travailler plus efficacement, de E. Matrullo et E. Maurette, éditeur PREPAMATH (Cote : 11681)

Remarque : beaucoup d'idées sur les différentes façons d'apprendre. L'ouvrage est destiné aux "prépa" et insiste (un peu trop?) sur les témoignages de ceux qui ont intégré.

Lecture et prise de notes : gestion mentale et acquisition de méthodes de travail, de B. Chevalier, éditeur Nathan (Cote PF/241 (ed 2004), Usuel 374 CHE)

Objectif ingénieur : Optimiser son temps en "prépa", par A. Lofficier, éditeur Les Editions d'Organisation (Cote : 9395)

Remarque: cette fois ne pas s'alarmer : l'auteur de l'ouvrage travaille dans une école à "prépa intégrée", donc (tout en restant un peu scolaire) peut aider ceux qui ont du mal à s'organiser.

Organisez vos idées avec le Mind Mapping, de J-L. Deladrière, F. Le Bihan, P. Mongin, D. Rebord, éditeur Dunod (Cote 20663)

Une tête bien faite : Exploitez vos ressources intellectuelles, de Tony Buzan, éditeur Les Editions d'organisation (Cote 8439)